## Optimalni predajni i prijemni filtar

Funkcije prijenosa optimalnog predajnog i prijemnog filtra odredit ćemo za idealan kanal prijenosa u osnovnom pojasu frekvencija. U idealnom kanalu je na izlazu prijemnog filtra spriječen nastup interferencije simbola. Osnovni pojas frekvencija je pojas u kojemu se nalazi spektar primarnog signala. Optimalne funkcije prijenosa daju na izlazu prijemnog filtra maksimalan omjer *S*/*N*, što znači i najmanju vjerojatnost pogrešnog prijema simbola. Na ulaz predajnog filtra djeluju simboli u obliku delta funkcije površine *d* u vremenskim trenucima *t* = ±*kT*N (*Slika 6.6*).



*Slika 6.6 Model kanala prijenosa u osnovnom pojasu frekvencija*

Funkcija prijenosa prijenosnog sustava je idealna tj. frekvencijska karakteristika |*H*C(*ω*)| = *K* jednaka je u pojasu prijenosa konstanti, a fazna karakteristika je linearna. Aditivna smetnja *n*(*t*) je bijeli Gaussov šum sa srednjom vrijednosti jednakom nuli. Na ulaz prijemnog filtra djeluje zbroj signala i šuma, *x*(*t*) + *n*(*t*). Filtrirani zbroj signala i šuma na izlazu prijemnog filtra uzorkuje se u trenucima *t* = ±*kT*N.

Funkcija prijenosa kanala *H*(*ω*) = *H*T(*ω*)∙*H*C(*ω*)∙*H*R(*ω*), budući da kanal smatramo idealnim, je funkcija podignutog kosinusa s linearnom faznom karakteristikom. Za *H*C(*ω*) = 1 slijedi da je:

 (6.16)

Funkcija *H*(*ω*) je poznata, pa se postavlja problem određivanja funkcija prijenosa predajnog filtra *H*T(*ω*) i prijemnog filtra *H*R(*ω*), tako da omjer *S*/*N* između apsolutne veličine uzorka odziva i srednje efektivne vrijednosti napona šuma bude maksimalan:

 (6.17)

Veličina *E*[|*n*(*kT*N)|2] je srednja vrijednost (matematičko očekivanje) kvadrata slučajne veličine *n*(*kT*N). Energiju simbola na izlazu predajnog filtra određujemo iz jednakosti:

 (6.18)

gdje je *P*S snaga simbola na izlazu predajnog filtra i *d*2 energija simbola na njegovom ulazu. Srednja je snaga šuma na izlazu prijemnog filtra:

 (6.19)

Veličina *N*0 je spektralna gustoća bijelog šuma. Iz teorije signala poznato je da se maksimalan omjer *S*/*N* postiže primjenom usklađenog filtra. Frekvencijska karakteristika usklađenog prijamnog filtra jednakog je oblika kao spektar simbola na njegovom ulazu. Uzimajući u obzir i fazne karakteristike *Φ*T(*ω*) i *Φ*R(*ω*) ovaj se odnos prikazuje u obliku:

 (6.20)

Za realne funkcije *H*(*ω*), *H*T(*ω*) i *H*R(*ω*), te uz bijeli šum, maksimalan omjer *S*/*N* postižemo kada je:

 i  (6.21)

Maksimalan je omjer *S*/*N* na izlazu prijemnog filtra:

 (6.22)

Omjer *S*/*N* na izlazu prijemnog filtra nije ovisan o obliku simbola (odziva) već ovisi samo o energiji simbola i spektralnoj gustoći šuma. Drugi izraz u (6.21) ukazuje da fazne karakteristike predajnog i prijemnog filtra moraju biti takvog oblika da je njihov zbroj linearna funkcija frekvencije.

Navedene zakonitosti pokazat ćemo na primjeru. Neka je frekvencijska karakteristika kanala prijenosa kosinuskvadratna |*H*(*ω*)| = *T*Ncos2(π*ω*/4*ω*g). Frekvencijska karakteristike predajnog i prijemnog filtra su sljedeće:



Uzorak odziva u *t* = 0 na izlazu prijemnog filtra jednak je:





Srednja je snaga šuma na izlazu prijemnog filtra:



Omjer *S*/*N* iznosi:



Integrali u izrazima za *y*(0) i *P*n daju površinu ograđenu frekvencijskom karakteristikom |*H*(*ω*)| funkcije prijenosa podignutog kosinusa. Budući da je ova površina jednaka za sve oblike funkcije podignutog kosinusa (za svaki 0 ≤ *r* ≤ 1) i omjeri *S*/*N* su jednaki.

Do sada smo uzimali da na ulazu predajnog filtra djeluju simboli u obliku Diracove delta funkcije. Ustanovimo sada uvjet za prijenos simbola proizvoljnog oblika i trajanja *T* u idealnom kanalu prijenosa. Prvi će Nyquistov kriterij biti ispunjen ako je trajanje simbola jednako Nyquistovom intervalu *T*N i ako odziv na izlazu prijemnog filtra ravnomjerno prolazi kroz nulu u trenucima *t* = ±*kT*N. Uzmemo li u obzir podjelu funkcije prijenosa kanala na funkcije prijenosa predajnog i prijemnog filtra, ravnomjernost prolaza kroz nulu bit će sačuvana ako je spektar simbola na izlazu predajnog filtra jednak spektru koji bi uzrokovala delta funkcija. Uvjet je:

 (6.23)

Oznake su sljedeće:

*G*(*ω*) – spektar određenog oblika simbola trajanja *T*

*H*T(*ω*) – funkcija prijenosa predajnog filtra za ovaj simbol

*H*R(*ω*) – funkcija prijenosa podignutog kosinusa.

Spektar je pravokutnog impulsa jedinične amplitude i trajanja T:



Jednostavnosti radi uzmimo da je *H*(*ω*) kosinuskvadratna funkcija i odredimo iz (6.23) frekvencijsku karakteristiku predajnog filtra. Rješenje je:



Spektar pravokutnog impulsa i normalizirane frekvencijske karakteristike predajnog filtra |*H*T(*ω*)|/|*H*T(0)| za *r* = 0, 0,5, 0,75 i 1 prikazane su na slici (*Slika 6.7*). Za *T* = *T*N slijedi *ω*g = *ω*N = π/*T*. Frekvenciju *ω*N nazivamo Nyquistovom frekvencijom.



Slika 6.7 Frekvencijske karakteristike predajnog filtra za prijenos pravokutnih simbola